

МАТЕМАТИКА 1

ЛЕКЦИЈА 3

2 --- ЛЗ СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

Дефиниција система линеарних алгебарских једначина

Систем од m линеарних алгебарских једначина са n непознатих --- конјункција m линеарних алгебарских једначина са по n непознатих:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \text{---} &\text{---} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1)$$

a_{ij} , $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$, --- коефицијенти уз непознате; b_i , $i=1, 2, \dots, m$, --- слободни чланови; x_j , $j=1, 2, \dots, n$, --- непознате. Ако су у систему (1) сви слободни чланови једнаки 0, тај систем се назива *хомогеним*, а у супротном *нехомогеним*. Решење система (1) --- уређена n -торка (n -точлани низ) бројева $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ која задовољава све једначине система. Систем (1) *несагласан* (*немогућ*) ако нема решења, *сагласан* (*могућ*) ако има решења, *одређен* ако има тачно једно решење, *неодређен* ако има више него једно решење (бесконечно много). Два система линеарних алгебарских једначина *еквивалентна* ако имају исти скуп решења.

Матрични запис система (1):

$$AX = B, \quad (2)$$

где је $A = [a_{ij}]_n^m$ (матрица система), $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ (матрица-колона слободних

чланова), $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (матрица-колона непознатих). Ако је (u_1, u_2, \dots, u_n) решење

система (1), онда је $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ решење матричне једначине (2), и обрнуто.

Крамерова теорема

Систем квадратног облика, тј. са истим бројем једначина колико и непознатих:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ - &- - - - - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (3)$$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{--- детерминанта система (3), } D_j =$$

$$= \begin{vmatrix} & & (j) & & \\ a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{--- } j\text{-та Крамерова детерминанта, } j=1, 2, \dots, n.$$

Теорема (Крамерова): Потребан и довољан услов да систем (3) буде одређен јесте да буде $D \neq 0$. *Доказ довољности:* $D \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Матрична једначина $AX = B$ еквивалентна једначини $X = A^{-1}B$. Последња једначина има јединствено решење $A^{-1}B$, па и полазна има јединствено решење. Следи да и систем (3) има тачно једно решење, тј. да је одређен. Доказ потребности --- на вежбама (АГ).

Крамерово правило

Ако је $D \neq 0$, тада је n -точлани низ $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D}\right)$ једино решење система (3). То следи из доказа довољности услова у Крамеровој теорему, на следећи начин:

$$A^{-1}B = \frac{1}{D} (\text{adj } A) B = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}.$$

Кронекер-Капелијева теорема

Теорема (Кронекер-Капелијева): Потребан и довољан услов да систем (1) буде сагласан јесте да буде $r(A_1) = r(A)$. (A_1 --- проширена матрица система (1))

Доказ потребности: Нека је (u_1, u_2, \dots, u_n) неко решење система (1). Додавањем последњој колони матрице A_1 прве колоне помножене са $-u_1$, затим друге помножене са $-u_2$, итд., најзад, n -те помножене са $-u_n$, добија се матрица $A_1' \sim A_1$:

$$A_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \alpha_m \end{bmatrix},$$

где је $\alpha_i = b_i - \sum_{j=1}^n u_j a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следи, на основу дефиниције ранга матрице, да је $r(A_1') = r(A)$ (јер је A подматрица A_1'), тј. да је $r(A_1) = r(A)$. Доказ довољности --- на вежбама (АГ).

Гаусов поступак

Систем линеарних алгебарских једначина у канонском облику --- систем облика (1) чија проширена матрица је горња квази-троугаона, при чему је гранични члан у колони слободних чланова, ако постоји, једнак 1:

$$\begin{array}{rcl} a_{1s_1}x_{s_1} + \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{2s_2}x_{s_2} + \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \dots & \\ a_{rs_r}x_{s_r} + \dots + a_{rn}x_n & = b_r & (4) \\ & 0 & = 1 \\ & 0 & = 0 \\ & \dots & \\ & 0 & = 0. \end{array}$$

Елементарне трансформације система линеарних алгебарских једначина:
(а) међусобна замена места двеју једначина; (б) множење неке једначине система неким бројем различитим од 0; (в) додавање некој једначини неке друге помножене неким бројем.

Теорема: Применом било које елементарне трансформације на систем (1), добија се њему еквивалентан систем.

Теорема: Сваки систем линеарних алгебарских једначина може да се сведе на неки систем у канонском облику применом елементарних трансформација коначно много пута. Доказ --- свођење матрице система на горњу квазитроугаону применом елементарних трансформација по врстама.

Решавање система у канонском облику: Ако не садржи једначину $0 = 1$, из r -те једначине изразити x_{s_r} помоћу $x_{s_r+1}, x_{s_r+2}, \dots, x_n$, уврстити у претходну па из ње изразити $x_{s_{r-1}}$ помоћу $x_{s_{r-1}+1}, x_{s_{r-1}+2}, \dots, x_n$, итд., све док се прва једначина не реши по x_{s_1} . Тако, све непознате изузев $x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_r}$, могу да узимају произвољне вредности (тзв. слободне непознате).

Гаусов поступак --- свођење датог система линеарних алгебарских једначина на неки систем у канонском облику, применом елементарних трансформација, и решавање добијеног система, а тиме и полазног.

Дискусија система линеарних алгебарских једначина: Сагласан ако $r(A_1) = r(A) = r$; одређен ако $n = r$ ($= r(A_1) = r(A)$); неодређен ако $n > r$ ($= r(A_1) = r(A)$). Број слободних непознатих $n - r$.

Хомоген систем линеарних алгебарских једначина има нетривијалних решења ако и само ако је ранг његове матрице мањи од броја непознатих система.